Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Алгоритмы и алгоритмические языки
Лекция 2

7 сентября 2019 г.

Машина Тьюринга. Обозначения

Алфавит состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n\}$

Рабочий алфавит $S = A \cup A'$

> A — алфавит *входных* символов
>
> A' — алфавит *вспомогательных* символов (*маркеров*)

Лента, размеченная на ячейки (пустая ячейка — Λ)

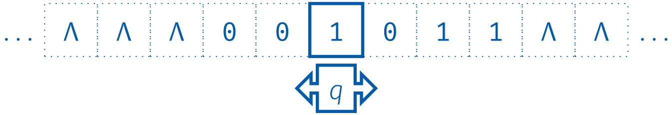
Управляющая головка (УГ)

Рабочая ячейка (РЯ)

Начальное состояние q_0, состояние останова q_s

Начальные данные — слова из A^*

Машина Тьюринга. Конфигурация



Конфигурация МТ: $\langle n, F, q\rangle$, где n — номер текущей рабочей ячейки, $F : \mathbb{Z} \to S$ — текущая запись на ленте, q — текущее состояние.

Позиция МТ: пара $\langle n, q\rangle$.

Такт работы МТ:
$\langle \textit{состояние}, \textit{символ}\rangle \to \langle \textit{состояние}, \textit{символ}, \textit{направление}\rangle$.

Машина Тьюринга. Пример

Проверка правильности скобочных выражений: МТ должна записать на ленту для правильного скобочного выражения результат 1 (для неправильного 0) и остановиться.

Правильное скобочное выражение[1]:

1. число открывающих скобок равно числу закрывающих,
2. каждая открывающая скобка предшествует парной ей закрывающей скобке.

(( )) ( ) — правильное скобочное выражение
) (или (( ) — неправильные скобочные выражения

[1]для одного типа скобок

Машина Тьюринга. Пример

Проверка правильности скобочных выражений: МТ должна записать на ленту для правильного скобочного выражения результат 1 (для неправильного 0) и остановиться.

Рабочий алфавит: $S = \{(,),0,1\} \cup \{\Lambda, X\}$
Алфавит состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_s\}$

- q_0 — начальное состояние МТ: поиск ближайшей справа закрывающей скобки;
- q_s — состояние останова;
- q_1 — поиск парной открывающей скобки;
- q_2 — стирание маркеров, запись результата `1` и переход в состояние q_s;
- q_3 — стирание маркеров, запись результата `0` и переход в состояние q_s.

В начальном состоянии УГ обозревает самый левый символ входного слова.

Машина Тьюринга. Пример

Проверка правильности скобочных выражений: МТ должна записать на ленту для правильного скобочного выражения результат 1 (для неправильного 0) и остановиться.

Программа

$q_0, (\to q_0, (, R$	$q_0,) \to q_1, X, L$	$q_0, X \to q_0, X, R$	$q_0, \Lambda \to q_2, \Lambda, L$
$q_1, (\to q_0, X, R$	$q_1,) \to q_1,), L$	$q_1, X \to q_1, X, L$	$q_1, \Lambda \to q_3, \Lambda, R$
$q_2, (\to q_3, \Lambda, H$	$q_2,)$ невозможно	$q_2, X \to q_2, \Lambda, L$	$q_2, \Lambda \to q_s, 1, H$
$q_3, (\to q_3, \Lambda, L$	$q_3,)$ невозможно	$q_3, X \to q_3, \Lambda, L$	$q_3, \Lambda \to q_s, 0, H$

Проверка правильности скобочных выражений: МТ должна записать на ленту для правильного скобочного выражения результат 1 (для неправильного 0) и остановиться.

Программа (способ записи в виде таблицы)

$q_i \downarrow \setminus s_j \rightarrow$	(	)	X	Λ
q_0	$q_0, (, R$	q_1, X, L	q_0, X, R	q_2, Λ, L
q_1	q_0, X, R	$q_1,), L$	q_1, X, L	q_3, Λ, R
q_2	q_3, Λ, H	—	q_2, Λ, L	$q_s, 1, H$
q_3	q_3, Λ, L	—	q_3, Λ, L	$q_s, 0, H$

Проверка правильности скобочных выражений: МТ должна записать на ленту для правильного скобочного выражения результат 1 (для неправильного 0) и остановиться.

Программа (способ записи в виде таблицы)

$q_i \downarrow \setminus s_j \rightarrow$	(	)	X	Λ
q_0	$q_0, (, R$	q_1, X, L	q_0, X, R	q_2, Λ, L
q_1	q_0, X, R	$q_1,), L$	q_1, X, L	q_3, Λ, R
q_2	q_3, Λ, H	—	q_2, Λ, L	$q_s, 1, H$
q_3	q_3, Λ, L	—	q_3, Λ, L	$q_s, 0, H$

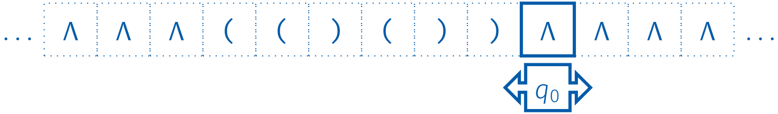
На ленте не должно остаться ничего, кроме числа 1 или 0.

Дома: исправьте программу, чтобы лишние символы стирались. Происходит ли это сейчас? Для всех ли слов?

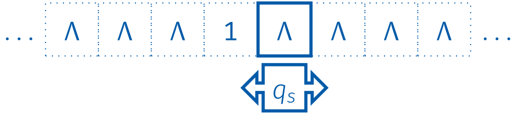
Машина Тьюринга. Нормальные МТ

Любую МТ можно перестроить таким образом, что она будет, вычисляя ту же функцию, удовлетворять следующим условиям:

1. в начальном состоянии q_0 УГ установлена напротив пустой ячейки, которая следует за всеми исходными символами:



2. в состоянии останова q_s УГ установлена напротив пустой ячейки, которая следует за всеми символами результата:



МТ, удовлетворяющая условиям (1) и (2), называется *нормальной* МТ.

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

МТ с лентой, ограниченной с левого конца Для произвольной МТ T с неограниченной лентой построим МТ T' с лентой, ограниченной с левого конца, которая работает так же:

1. перегнём ленту по ячейке с номером 0;
2. раздвинем ячейки правой части ленты: символ из ячейки с номером $n > 0$ перепишем в ячейку с номером $2 \times n$;
3. в освободившиеся ячейки с нечётными номерами перенесём содержимое ячеек левой части ленты: символ ячейки с номером $n < 0$ перепишем в ячейку с номером $2 \times |n| - 1$.

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

МТ с лентой, ограниченной с левого конца

В результате конфигурация МТ T

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	
$\ldots$	Λ	Λ	Λ	k	$\boxed{a}$	b	c	d	a	f	Λ	Λ	$\ldots$
					q_0								

перейдёт в конфигурацию МТ T'

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	-5	5	-6	
[	b	$\boxed{a}$	c	k	d	Λ	a	Λ	f	Λ	Λ	Λ	$\ldots$
		q_0											

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

МТ с лентой, ограниченной с левого конца

Передвижения машины:

T	T' (чётные)	T' (нечётные)	T' (ячейка 0)	T' (ячейка 1)
вправо	на две вправо	на две влево	на две вправо	на одну влево
влево	на две влево	на две вправо	на одну вправо	на две вправо

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

МТ с лентой, ограниченной с левого конца

Передвижения машины:

T	T' (чётные)	T' (нечётные)	T' (ячейка 0)	T' (ячейка 1)
вправо	на две вправо	на две влево	на две вправо	на одну влево
влево	на две влево	на две вправо	на одну вправо	на две вправо

Откуда известна четность ячейки? Как узнать, что МТ подошла к краю ленты?

МТ с лентой, ограниченной с левого конца

Передвижения машины:

T	T' (чётные)	T' (нечётные)	T' (ячейка 0)	T' (ячейка 1)
вправо	на две вправо	на две влево	на две вправо	на одну влево
влево	на две влево	на две вправо	на одну вправо	на две вправо

Откуда известна четность ячейки? Как узнать, что МТ подошла к краю ленты?

«Размножение состояний» и специальный маркер в начале ленты.

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

МТ с укороченными инструкциями

Рассмотрим произвольную инструкцию МТ T: $q, a \to \; q^{'}, b, R$.
Разобьём её на две инструкции:

$q, a \to \; q^{''}, b, S$ (только записывает символ в РЯ);
$q^{''}, b \to \; q^{'}, b, R$ (только сдвигает головку).

Можно доказать, что для любой МТ T можно построить МТ $T^{'}$, каждая инструкция которой либо только сдвигает головку, либо только записывает символ в РЯ.

МТ $T^{'}$ и есть МТ с укороченными инструкциями.

Перестройка МТ к виду, более удобному для ДТ

Далее будем рассматривать класс МТ, который содержит только МТ с укороченными инструкциями и лентой, ограниченной слева. Кроме того, будем считать, что МТ, принадлежащие рассматриваемому классу, выполняют нормальные вычисления по Тьюрингу.
Все эти предположения не являются ограничением общности, так как по произвольной МТ нетрудно построить МТ рассматриваемого класса.

Основным преимуществом рассматриваемого класса МТ является возможность ввести понятие *действия*

$$v = \{L, R, H, s_i \in S\}$$

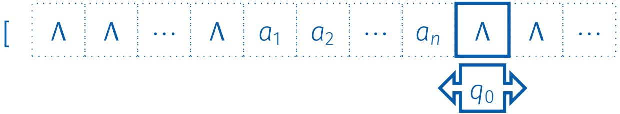
Диаграммы Тьюринга. Элементарные ДТ

Запись символа в РЯ или сдвиг УГ вправо или влево называются *элементарными действиями*.

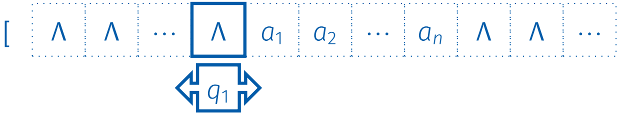
Элементарная МТ	Программа	Диаграмма
$\boldsymbol{l}$	$q_0\Lambda \to Lq_1,\ q_0a_1 \to Lq_1,\ \ldots,\ q_0a_p \to Lq_1$	$\cdot \boldsymbol{l} \cdot$
$\boldsymbol{r}$	$q_0\Lambda \to Rq_1,\ q_0a_1 \to Rq_1,\ \ldots,\ q_0a_p \to Rq_1$	$\cdot \boldsymbol{r} \cdot$
$\boldsymbol{a_i}$	$q_0\Lambda \to a_iq_1,\ q_0a_1 \to a_iq_1,\ \ldots,\ q_0a_p \to a_iq_1$	$\cdot \boldsymbol{a_i} \cdot$

$$L = \begin{tikzcd} \cdot\, l\, \cdot \arrow[loop above, "\neq \Lambda"] \arrow[r, "= \Lambda"] & \cdot \end{tikzcd}, \quad R = \begin{tikzcd} \cdot\, r\, \cdot \arrow[loop above, "\neq \Lambda"] \arrow[r, "= \Lambda"] & \cdot \end{tikzcd}.$$

МТ L переводит конфигурацию



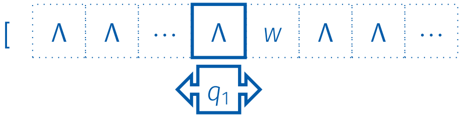
в конфигурацию



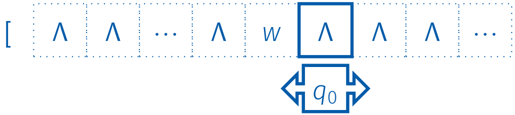
Диаграммы Тьюринга. Примеры ДТ неэлементарных машин

$$
\begin{tikzcd}
L = & \cdot\, l \,\cdot \arrow[loop above, "\neq \Lambda"] \arrow[r, "= \Lambda"] & \cdot\,, & R = & \cdot\, r \,\cdot \arrow[loop above, "\neq \Lambda"] \arrow[r, "= \Lambda"] & \cdot\,.
\end{tikzcd}
$$

Будем обозначать слово $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ на ленте как w, тогда конечная конфигурация для МТ $\boldsymbol{L}$:



МТ K переводит конфигурацию



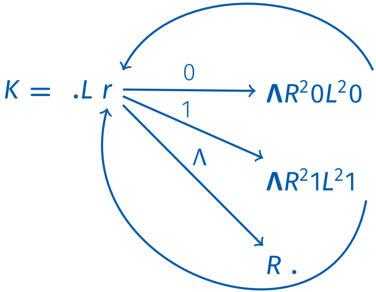
в конфигурацию

$$K = \begin{tikzcd}
.L \arrow[r] & r \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "1"'] \arrow[ddr, "\Lambda"'] & \Lambda \arrow[r] & R \arrow[r] & R \arrow[r] & 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & L \arrow[r] & 0 \arrow[lllllll, bend right] \\
 & & \Lambda \arrow[r] & R \arrow[r] & R \arrow[r] & 1 \arrow[r] & L \arrow[r] & L \arrow[r] & 1 \arrow[ullllll, bend left] \\
 & & R\,. & & & & & &
\end{tikzcd}$$

Диаграммы Тьюринга. Упрощённая ДТ копирующей машины

Упрощающие соглашения:

- Если над стрелкой не указано никаких символов, над ней нужно надписать все символы рабочего алфавита *и опустить*.
- Если подряд идут n символов одной и той же машины $\boldsymbol{M}$, то их можно заменить одним символом $\boldsymbol{M}^n$.



Построение таблиц по диаграммам

1. Заменим упрощённую диаграмму полной.
2. С помощью индексации добиваемся того, чтобы каждый символ МТ входил в диаграмму только один раз.

$$
K = \begin{tikzcd}
.L_1 \arrow[r] & r_0 \arrow[r, "0"] \arrow[dr, "1"] \arrow[ddr, "\Lambda"'] & \Lambda_1 \arrow[r] & R_1 \arrow[r] & R_2 \arrow[r] & 0_1 \arrow[r] & L_2 \arrow[r] & L_3 \arrow[r] & 0_2 \arrow[lllllll, bend right] \\
 & & \Lambda_2 \arrow[r] & R_3 \arrow[r] & R_4 \arrow[r] & 1_1 \arrow[r] & L_4 \arrow[r] & L_5 \arrow[r] & 1_2 \arrow[ulllllll, bend left] \\
 & & R_5\ . & & & & & &
\end{tikzcd}
$$

3. Сопоставим каждому символу МТ её таблицу (таблицу запишем в виде набора соответствующих инструкций).

Построение таблиц по диаграммам

4. Перепишем все таблицы одну за другой (в любой последовательности).
5. Добавим в таблицу следующие строки:
   5.1 для каждого символа a входного алфавита, которому соответствует стрелка, ведущая из точки снова к ней же, добавим строку $q_0 a \to a q_0$;
   5.2 для каждого символа a входного алфавита, которому соответствует стрелка, ведущая из точки к символу МТ $\boldsymbol{M}$, добавим строку $q_0 a \to a q_{M0}$;
   5.3 для каждого символа a входного алфавита, которому не соответствует никакая стрелка, ведущая из точки, добавим строку $q_0 a \to H q_s$;
   5.4 если два символа МТ $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{M}'$ соединены стрелкой, над которой надписан символ a, то для состояния останова q_{Ms} из части таблицы, соответствующей $\boldsymbol{M}$, добавляем строку $q_{Ms} a \to a q_{M' 0}$ (аналогично для стрелки в состояние останова).

Построение таблиц по диаграммам

В результате преобразований 1–5 получится таблица МТ, которая выполняет те же действия, что и МТ, заданная диаграммой. Тем самым мы всегда можем построить таблицу МТ по диаграмме, а строить диаграммы по таблице МТ мы уже умеем.

Следовательно, МТ, задаваемые диаграммами, эквивалентны МТ, задаваемым таблицами.